2η Άσκηση

Συναρτήσεις

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\lambda x}{x^2+4}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(2,1)$.

α) Να δείξετε ότι $\lambda = 4$.
β) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.
γ) Να δείξετε ότι η f έχει μέγιστη τιμή το 1 και ελάχιστη τιμή το -1. Ποιες είναι οι θέσεις ακροτάτων;
δ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $256x^4 + 16x^2\left(x^2+4\right)^2 - 2\left(x^2+4\right)^4 \le 0$
ε) Να υπολογίσετε το $f\left(f\left(x^{1453}-2\right)+f\left(2-x^{1453}\right)+f(2)\right)$.
στ) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(2,+\infty)$.

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) Επειδή η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(2,1)$, ισχύει ότι

$$f(2)=1 \Leftrightarrow \frac{2\lambda}{4+4}=1 \Leftrightarrow 2\lambda=8 \Leftrightarrow \lambda=4$$

β) Για να ορίζεται η f πρέπει $x^2+4\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq -4$ ισχύει, άρα $D_f=\mathbb{R}$, επομένως για κάθε $x\in A_f, -x\in A_f$.

Επειδή $f(-x)=\dfrac{4(-x)}{(-x)^2+4}=-\dfrac{4x}{x^2+4}=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η f είναι περιττή.

γ) Για να έχει η f μέγιστη τιμή το 1, αρκεί $f(x)\leq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $f(x)\leq 1 \Leftrightarrow \dfrac{4x}{x^2+4}\leq 1 \Leftrightarrow 4x\leq x^2+4 \Leftrightarrow 0\leq x^2-4x+4 \Leftrightarrow (x-2)^2\geq 0$ ισχύει και

$f(x)=1 \Leftrightarrow \dfrac{4x}{x^2+4}=1 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=2$, οπότε η f έχει μέγιστο το 1 για $x=2$.

Για να έχει η f ελάχιστη τιμή το - 1, αρκεί $f(x)\geq -1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $f(x)\geq -1 \Leftrightarrow \dfrac{4x}{x^2+4}\geq -1 \Leftrightarrow 4x\geq -x^2-4 \Leftrightarrow x^2+4x+4\geq 0 \Leftrightarrow (x+2)^2\geq 0$ ισχύει και

$f(x)=-1 \Leftrightarrow \dfrac{4x}{x^2+4}=-1 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (x+2)^2=0 \Leftrightarrow x=-2$, οπότε η f έχει ελάχιστο το -1 για $x=-2$.

δ) $256x^4+16x^2\left(x^2+4\right)^2-2\left(x^2+4\right)^4\leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{(4x)^4}{\left(x^2+4\right)^4}+\dfrac{16x^2\cancel{\left(x^2+4\right)^2}}{\left(x^2+4\right)^{\cancel{4}\,2}}-\dfrac{2\cancel{\left(x^2+4\right)^4}}{\cancel{\left(x^2+4\right)^4}}\leq 0 \Leftrightarrow$

$$f^4(x)+\frac{(4x)^2}{\left(x^2+4\right)^2}-2\leq 0 \Leftrightarrow f^4(x)+f^2(x)-2\leq 0 \overset{f^2(x)=\omega}{\Leftrightarrow} \omega^2+\omega-2\leq 0 \Leftrightarrow -2\leq\omega\leq 1 \Leftrightarrow -2\leq f^2(x)\leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} f^2(x)\geq -2 \text{ ισχύει} \\ f^2(x)\leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow |f(x)|\leq 1 \Leftrightarrow -1\leq f(x)\leq 1 \text{ ισχύει για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

ε) Επειδή η f είναι περιττή ισχύει ότι $f\left(2-x^{1453}\right)=f\left(-\left(x^{1453}-2\right)\right)=-f\left(x^{1453}-2\right)$, οπότε:

$$f\left(f\left(x^{1453}-2\right)+f\left(2-x^{1453}\right)+f(2)\right)=f\left(\cancel{f\left(x^{1453}-2\right)}-\cancel{f\left(x^{1453}-2\right)}+f(2)\right)=f\left(f(2)\right)=f(1)=\frac{4}{5}$$

στ) Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x_1,x_2\in(2,+\infty)$ με $x_1<x_2$ είναι

$$f(x_1)>f(x_2) \Leftrightarrow \frac{4x_1}{x_1^2+4}>\frac{4x_2}{x_2^2+4} \Leftrightarrow 4x_1\left(x_2^2+4\right)>4x_2\left(x_1^2+4\right) \Leftrightarrow 4x_1x_2^2+16x_1>4x_1^2x_2+16x_2 \Leftrightarrow$$

$$4x_1x_2^2-4x_1^2x_2+16x_1-16x_2>0 \Leftrightarrow 4x_1x_2(x_2-x_1)+16(x_1-x_2)>0 \overset{:4}{\Leftrightarrow}$$

$x_1x_2(x_2-x_1)-4(x_2-x_1)>0 \Leftrightarrow (x_2-x_1)(x_1x_2-4)>0$ που ισχύει αφού $x_1>2,\ x_2>2 \Rightarrow x_1x_2>4$ και $x_1<x_2 \Leftrightarrow 0<x_2-x_1$